PENGGUNAAN L U DAN ELIMINASI GAUSS – JORDAN PADA SISTEM LINEAR

Purwantini

Dosen Teknik Sipil Universitas 17 Agustus 1945 Semarang

ABSTRAK

Dekomposisi Lower Upper (Dekomposisi L U) merupakan perluasan dari Eliminasi Gauss – Jordan.
Dekomposisi L U dan Eliminasi Gauss – Jordan digunakan untuk menentukan harga x pada sistem linear.

Kata Kunci :

Eliminasi Gauss – Jordan, Dekomposisi LU

PENDAHULUAN

Sistem linear dapat diselesaikan dengan mengoperasikan matriks yang diperbesar secara sistematis dengan menggunakan Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss – Jordan.
Pendekatan yang lain didasarkan atas pemfaktoran matriks koefisien ke dalam hasil kali matriks segitiga bagian basah (L) dan matriks segitiga bagian atas (U).

Sistem Linear n persamaan dalam n bilangan tak diketahui dapat dipecahkan dengan memfaktorkan matriks koefisien matriks A yang berukuran n x n dapat difaktorkan sebagai : A = L U

Dengan L adalah Matriks Segitiga Bawah

dan U adalah Matriks Segitiga Atas

Matriks A yang berukuran n x n direduksi menjadi bentuk eselon baris U dengan urutan operasi baris elementer.

Matriks Elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sedemikian sehingga :

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = U$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} U$$

Matriks L didefinisikan sebagai :

$$L = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$$

dengan L merupakan Matriks Segitiga Bawah

PEMBAHASAN MASALAH

Dekomposisi L U	Eliminasi Gauss – Jordan
- Bentuk Matriks n x n - Tidak bisa tukar baris - Persamaan : $A\,x = b;\ b \neq 0$ - Langkah-langkah : • Cari matriks U • Cari matriks L • $A\,x = b$ • $L\,U\,x = b$ Untuk $U\,x = y$, maka $Ly = b$ Diperoleh harga : Harga y_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Untuk $U\,x = y$ Diperoleh harga : Harga x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$	- Bentuk Matriks n x n - Boleh tukar baris - Persamaan : $A\,x = b;\ b \neq 0$ - Langkah-langkah : • Matriks A dibawa ke bentuk eselon baris tereduksi, maka A berbentuk matriks Identitas.

Diberikan sistim linear berbentuk :

$$2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4$$

$$-2x_2 + 2x_3 = -2$$

$$-x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6$$

Carilah harga-harga x dengan menggunakan :

a. Eliminasi Gauss – Jordan
b. Dekomposisi L U

Penyelesaian :

a. Eliminasi Gaus – Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right] \overset{\frac{b_1}{2};\frac{b_2}{-2}}{\infty} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right] \overset{b_3+b_1}{\infty} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{b_3-4b_2}{\overset{b_1+b_2}{\infty}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{b_3}{5}}{\infty} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{b_2+2b_3}{\overset{b_1+2b_3}{\infty}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Jadi : $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$

b. Dekomposisi L U

Langkah-langkah :

(i) Carilah Matriks U, Matriks L

Dicek bahwa :

(ii) A = L U (dicek)

(iii) A x = b

L U x = b

U x = y $\Rightarrow$ L y = b

diperoleh harga y_i, i = 1, 2, 3, …

U x = y $\Rightarrow$ diperoleh harga x_i, i = 1, 2, 3, …

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

A x = b

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Reduksi Menjadi Bentuk Eselon Baris	Matriks Elementer yang bersesuaian dengan operasi baris	Invers Matriks Elementer
$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$		
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$\Rightarrow E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Jadi, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$L = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots .\, E_k^{-1}$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Jadi $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) Dicek bahwa : A = L U

$$L\,U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

= A (Terbukti)

(iii) a) L y = b

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$2y_1 = -4$ $\quad$ $-2y_2 = -2$ $\quad$ $-y_1 + 4y_2 + 5y_3 = 6$

$y_1 = -2$ $\quad$ $y_2 = 1$ $\quad$ $2 + 4 + 5y_3 = 6$

$5y_3 = 0$

$y_3 = 0$

b) U x = y

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 - x_3 = -2$ $\quad$ $x_2 - x_3 = 1$ $\quad$ $x_3 = 0$

$x_1 - 1 - 0 = -2$ $\quad$ $x_2 - 0 = 1$

$x_1 = -2 + 1$ $\quad$ $x_2 = 1$

$x_1 = -1$

Jadi $x_1 = -1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 0$

KESIMPULAN :

1. Dekomposisi L U merupakan perluasan Eliminasi Gaus – Jordan
2. Harga-harga x yang diperoleh sama, baik dengan Dekomposisi L U maupun Eliminasi Gauss – Jordan dengan syarat :
   a) Bentuk Matriks n x n
   b) Elemen Diagonal $\neq$ 0

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1988. *Aljabar Linier Elementer (terjemahan)*. Edisi Kelima. Jakarta : Erlangga.

Ayres Jr., Frank. 1994. *Teori dan Soal-soal Matriks (terjemahan)*. Cetakan Keempat. Jakarta : Erlangga.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya (terjemahan).* Cetakan Pertama. Jakarta : PT. Gramedia Pustaka Utama.

Surjadi, P. A. 1982. *Aljabar Linier dan Ilmu Ukur Analitik*. Cetakan Ketiga. Jakarta : Djambatan.